

Jürgen Bredenkamp

Kognitionspsychologische Untersuchungen eines Re-
chenkünstlers¹

Erschienen in:

H. Feger (Ed.), *Wissenschaft und Verantwortung.*
Festschrift für Karl Josef Klauer (pp. 47-70).
Göttingen: Hogrefe, 1990.

¹Mit Unterstützung der DFG. — Dem Rechenkünstler Gert Mittring, dessen Name auf seinen Wunsch hier mitgeteilt wird, sei an dieser Stelle dafür gedankt, daß er in den umfangreichen Befragungen so bereitwillig Auskunft erteilt und sich als Proband für die teilweise mühseligen Untersuchungen zur Verfügung gestellt hat.

allen Teilen als Daten über sein Vorgehen angesehen, sondern gaben Anlaß für die Formulierung von Hypothesen, die anhand anderer Kriterien überprüft wurden.

Zum Vorgehen des Probanden

Wie würden Sie, der Leser, die Aufgabe, um die es hier geht, lösen? Vermutlich würden Sie Ihren Computer die 1000-stellige Zahl logarithmieren und diesen Logarithmus durch 137 dividieren lassen, um zunächst den Logarithmus der Lösung zu bestimmen. Sodann wäre der Antilogarithmus des Lösungslogarithmus zu bilden, um die Lösung zu erhalten. Dieses Vorgehen — Logarithmierung der Aufgabe, Division durch n , Bestimmung des Antilogarithmus des Quotienten — ist eine reichsunspezifische Strategie, die zur Errechnung jeder beliebigen n -ten Wurzel taugt. Sie läßt sich aber nicht anwenden, wenn die 137. Wurzel aus einer 1000-stelligen Zahl im Kopf ausgerechnet werden soll. Hier wird die Aufgabe zum Problem, dessen Lösung nicht, wie eben dargestellt, algorithmisch, sondern nur heuristisch erreicht werden kann. Der Algorithmus garantiert die Lösung, das heuristische Vorgehen erreicht sie häufig, aber nicht immer (Anderson, 1985).

Wir werden jetzt zunächst das bereichsspezifische Vorgehen, also die für die Lösung der 137. Wurzel aus einer 1000-stelligen Zahl spezialisierte Strategie, darstellen, wie sie sich aus den Angaben unseres Experten ergibt. Die zu beschreibende Strategie paßt wohl gemerkt nur für das hier zu erörternde Problem; andere Wurzeln erfordern andere Vorgehensweisen.

Wie Anderson (1985) schreibt, zeichnet sich das Vorgehen von Experten durch die Entwicklung bereichsspezifischer Lösungsstrategien aus, was aufgrund der Aussagen unseres Probanden nur bestätigt werden kann.

Die 137. Wurzel aus einer tausendstelligen Zahl liegt zwischen etwa 19587130 und 19919117. Der Lösungsspielraum ist im Vergleich zu anderen Wurzeln, die der Proband ebenfalls im Kopf berechnet und deren Berechnung weniger spektakulär erscheint, relativ klein. Dieser Spielraum determiniert aber weitgehend die Schwierigkeit des Problems. Wir haben uns die 137. Wurzel zur weiteren Darstellung ausgesucht, weil dieses Problem bereichsspezifische Vorgehensweisen, aber auch Invarianten in der Auseinandersetzung mit geistigen Anforderungen schwieriger Probleme, die im Kopf zu lösen sind, besonders deutlich werden läßt.

Im folgenden wird über kognitionspsychologische Untersuchungen eines Rechenkünstlers berichtet, der verschiedenartige schwierige Rechenprobleme innerhalb kurzer Zeit im Kopf löst. Zu seinen Glanzleistungen gehört das Ausrechnen der 137. Wurzel aus einer tausendstelligen Zahl innerhalb von 47 sec. Diese Leistung wurde in Anwesenheit von Zeugen im Psychologischen Institut der Universität Bonn erbracht und ist nach Auskunft des Rechenkünstlers noch schneller möglich, wenn er ohne Beobachter rechnen kann. Mit der dokumentierten Zeit hat er unseren Personal-Computer allemal überflügelt. Die gestellten Aufgaben waren ihm nicht bekannt.

Der folgende Beitrag beschäftigt sich am Beispiel des Problems, die 137. Wurzel aus einer tausendstelligen Zahl im Kopf berechnen zu müssen — über weitere Untersuchungen wurde andernorts berichtet — mit der Frage, wie eine derartige Leistung möglich ist. Lassen sich bekannte Konzepte aus der kognitiven Psychologie zur Analyse dieser Leistung heranziehen? Welche bereichsspezifischen Denkschritte wendet ein Experte im Bereich des Kopfrechnens an, um phantastisch anmutende Leistungen zu erreichen? Über diese Fragen ist trotz der umfangreichen Dokumentation von Smith (1983) über das Vorgehen von Rechenkünstlern und des erhellenden Berichts Hunters (1962) über das Vorgehen Prof. Aitkens, eines genialen Mathematikers und Rechenkünstlers, wenig bekannt. Die Aussagen eines Probanden über sein Vorgehen reichen zu dessen Verstehen nicht aus. Erst wenn man aufgrund der Befragungen Modellvorstellungen über die Struktur des an der Problemlösung beteiligten Gedächtnissystems und der Prozesse aufbauen kann, die Prognosen über beobachtbare Daten zulassen, läßt sich im Falle ihrer Bestätigung begründet etwas über die Bausteine der kognitiven Leistung sagen. Diesen Weg haben wir beschritten, da wir mit der Möglichkeit rechneten, daß nicht jede Komponente des Problemlösungsprozesses der Introspektion zugänglich oder ohne Mißverständnisse zwischen Versuchsleiter und Proband verbalisierbar sei. Im Nachhinein fühlen wir uns in dieser Vorgehensweise bestätigt, worauf noch einzugehen ist. Betont sei aber, daß unser Proband, ein 20 Jahre alter Student der Informatik, der sich nach eigenen Aussagen schon seit dem 4. bis 5. Lebensjahr mit rechnerischen Problemen beschäftigt und seitdem laut eigener Schätzung etwa 1 Stunde pro Tag im Durchschnitt gerechnet hat, in intensiven Befragungen, die den Experimenten vorgeschaltet waren, so ausführlich geantwortet hat, daß die Hypothesenbildung erst möglich wurde. Diese setzt also die weitgehende Beobachtbarkeit der beteiligten Prozesse durch den Probanden voraus. Die Aussagen des Probanden wurden aber nicht in

Die Vorgehensweise unseres Experten läßt sich am besten darstellen, wenn man sie in einen algorithmischen Teil zur Generierung der letzten drei Lösungsziffern und in einen heuristischen Teil zur Generierung der 3.-5. Lösungsziffer aufgliedert; die ersten beiden Lösungsziffern sind immer 19. Ausgeklammert bleiben Aufgaben, die mit einer 0 oder 5 enden; letztere erfordern ein anderes Vorgehen, als es hier geschildert wird. Endet die Aufgabe auf 1, 3, 7 oder 9, so determinieren die letzten drei Aufgabenziffern die letzten drei Lösungsziffern einer aufgehenden Wurzel eindeutig. In Tabelle 1 sind diese Endungen für die Lösungen 001 bis 049 dargestellt. So gehört zur Aufgabenendung 001 die Lösungsendung 001, zur Aufgabenendung (AE)709 gehört die Lösungsendung (LE) 029 usw. 29137 ergibt also eine Zahl, deren letzte drei Ziffern 709 sind. Die Beziehungen zwischen AE und LE muß der Proband also verfügbar haben oder aufgrund bestimmter Regeln generieren können. Aufgrund seiner Aussagen haben wir uns eine von seinen Ausführungen etwas abweichende Modellvorstellung über die Repräsentation dieses Wissens gebildet und experimentell überprüft, worauf später noch einzugehen sein wird. Aufgabenendungen und Lösungsendungen, die nicht in Tab. 1 dargestellt sind, lassen sich aufgrund folgender Regeln erzeugen:

Regel A: Wenn $AE2 = AE1 + 850$, dann $LE2 = LE1 + 050$

Regel B: Wenn $AE2 = AE1 + 700$, dann $LE2 = LE1 + 100$

Zu $AE = 851$ gehört also $LE = 051$, zu $AE = 701$ gehört $LE = 101$, zu $AE = 551$ gehört $LE = 151$ usw. Ergibt die Addition mehr als 3 Ziffern, werden nur die letzten drei berücksichtigt. Aus $701 + 850$ wird also 551.

Tabelle 1

Zuordnung von Lösungs- und Aufgabenendungen, deren letzte Ziffer 1,3,7, oder 9 ist.

		Hunderter und Zehner der Lösungsendung									
		0	0	0	1	0	2	0	3	0	4
Einer der	1	001	971	141	511	081					
Lösungs-	3	363	333	703	473	643					
endung	7	207	377	147	517	487					
	9	769	339	709	879	849					

Bei Aufgaben, die auf 2, 4, 6, 8 enden, besteht im Falle der aufgehenden Wurzel keine eindeutige Determination der dreistelligen Lösungsendung durch die dreistellige Aufgabenendung. Tab. 2 gibt die Aufgabenendungen wieder, die mit den kleinsten Lösungsendungen verknüpft sind. Zusätzlich sind die gegebenen AE auch mit drei weiteren LE verbunden, die um 250, 500 und 750 höher als die angegebenen LE liegen. So ist AE 592 mit den Lösungen LE 012, 262, 512 und 762 verknüpft. Für in Tab. 2 nicht repräsentierte Zahlenpaare gilt die Regel:

Regel E: Wenn $AE2 = AE1 + 600$, dann gilt $LE2 = LE1 + 050$

Zweimalige Anwendung von Regel E führt etwa von AE 472 - LE 002, 252, 502, 752, zu AE 672 - LE 102, 352, 602, 852.

Tabelle 2

Zuordnung von Lösungs- und Aufgabenendungen, deren letzte Ziffer 2,4,6, oder 8 ist.

		Hunderter und Zehner der Lösungsendung									
		0	0	0	1	0	2	0	3	0	4
Einer der	2	472	592	312	632	552					
Lösungs-	4	784	704	424	944	264					
endung	6	336	656	176	896	816					
	8	048	968	288	008	128					

Für die Generierung der letzten drei Lösungsziffern existiert also ein Algorithmus, der auch zur Prüfung der Richtigkeit der heuristisch erreichten Lösung eingesetzt werden kann, worauf jetzt einzugehen ist. Die Heuristik setzt sich aus folgenden Schritten zusammen:

1. Es muß der Logarithmus der Aufgabenzahl geschätzt werden. Exakt ist dieser $\text{Logarithmus} = 999 + \log(1. \text{ Ziffer der Aufgabe, } 999 \text{ weitere Ziffern})$. Für das heuristische Verfahren genügt es, etwa die ersten drei (bei ungeraden Aufgabenendungen) bis vier (bei geraden Aufgabenendungen) Ziffern der Aufgabe zu betrachten. Die Angaben des Probanden zur Frage, wieviele Ziffern er verwendet, differieren merklich (bis zu 7 Ziffern wurden genannt), was teilweise an der Konstellation der Ziffern liegen dürfte. Da er die meisten Logarithmen drei- und vierstelliger Zahlen nicht kennt, muß er sie errechnen. Hierfür stehen verschiedene Möglichkeiten zur

Verfügung, und der Proband muß sich für eine entscheiden. Bevor also gerechnet wird, muß das Vorgehen geplant werden. Erkennt der Proband sofort, daß der drei- bis vierstelligen Aufgabenanfang in das Produkt von Zahlen zerlegbar ist, deren Logarithmen er kennt — das sind nach seinen Aussagen alle zwischen 1 und 100 — und schätzt er die Addierbarkeit der Logarithmen als einfach ein, so verfolgt er wegen der größeren Genauigkeit diesen Weg. Andernfalls kann auch der Weg der linearen Interpolation verfolgt werden. Lauten die ersten Ziffern etwa 208, so kann er die Logarithmen für 20 und 21 benutzen, um durch lineare Interpolation den Logarithmus für 20,8 zu schätzen. Interessant sind nur die Stellen hinter dem Komma, die für $\log 20,8$ und $\log 208$ identisch sind. Sie müssen dem Wert 999 hinzugefügt werden, da der Logarithmus einer 1000-stelligen Zahl immer zwischen 999 und 999,9 liegt. Manchmal liegt der Aufgabenanfang so günstig, daß keines dieser Verfahren angewendet werden muß. Nehmen wir an, daß die ersten Ziffern der Aufgabe 497332 sind. $\log 4,97332$ liegt nahe bei $\log 5$. $\log 5$ wird geringfügig auf 0,697 nach unten korrigiert, so daß man als Schätzung für den Aufgabenlogarithmus 999,697 erhält. Wie sich zeigen wird, reicht diese Approximation aus, um die 137. Wurzel aus einer Zahl zu ziehen, die mit 497332 beginnt und auf 977 endet.

M. hat diese Aufgabe in 47 sec. gelöst.

2. Jetzt müßte die Schätzung für den Aufgabenlogarithmus durch 137 dividiert werden. Diese Division führt unser Proband nicht durch, sondern er berechnet etwas anderes, was im Effekt der Division durch 137 entspricht. Dieses das Arbeitsgedächtnis entlastende Vorgehen setzt zunächst einmal voraus, daß gewußt wird, daß $73 \times 137 = 10001$, so daß $73/10000$ recht genau $1/137$ entspricht. Statt aber den Aufgabenlogarithmus mit $(73/10000)$ zu multiplizieren, um den Lösungslogarithmus zu erreichen, berechnet M. etwas anderes, dessen Rationale hier rekonstruiert wird.

G sei eine Zahl, deren Logarithmus 1000,1 ist, so daß $(\log G)/137 = 7,3$. G hat mehr als 1000 Ziffern, so daß $1000,1 - \log D = \log A$ bzw. $7,3 - (1/137) \log D = (1/137) \log A$ gilt. $\log A$ ist der Logarithmus der gegebenen 1000-stelligen Zahl, und $(1/137) \log A$ entspricht dem Logarithmus der Lösung. Da $1/137$ recht genau $73/10000$ entspricht, hat M. zunächst $\log D$ zu bestimmen (für das Beispiel 0,403), diesen Wert mit $(73/10000)$ zu multiplizieren (für das Beispiel 0,0029419) und das Ergebnis von 7,3 zu subtra-

hieren, um den Lösungslogarithmus zu erreichen (für das Beispiel 7,2970581). Da die ersten beiden Stellen der Mantisse des Lösungslogarithmus immer 29 sind, genügt die Multiplikation der Mantisse von $\log D$ mit 73 und Subtraktion dieses Resultats von 100000, um die 3. bis 7. Stelle der Mantisse des Lösungslogarithmus zu finden. Dies ist die Rechnung, die M. tatsächlich durchführt. Multiplikationen auch größerer Zahlen sind einfach für ihn, da er hierfür verschiedene Regeln zur Verfügung hat, auf die hier nicht einzugehen ist.

3. Die ersten beiden Ziffern der Lösung lauten immer 19, die dritte Lösungsziffer ist eine 5, 6, 7, 8 oder 9. Unser Proband hat die Logarithmen von 196 bis 199 bis auf 7 Stellen hinter dem Komma verfügbar. Da die ersten beiden Ziffern der Mantisse immer 29 lauten, genügt die Betrachtung der 3. – 7. Stelle. Die Mantisse für das Beispiel liegt zwischen denen für 198 und 199.

Die dritte Ziffer der Lösung muß also 8 sein.

4. Wie werden die weiteren Lösungsziffern gefunden? Wie gesagt sind die Logarithmen für 196 bis 199 genau verfügbar. Die 3. – 7. Stelle der Mantissen gibt M. wie folgt an:

Numerus	3. bis 7. Stelle der Mantisse
199	88531
198	66651
197	44661
196	22561

Den Logarithmus für 195 kennt er nicht genau, weil Lösungen, deren 3. Ziffer eine 5 ist, selten auftreten. Notfalls muß er ihn durch die Summe der Logarithmen für 3,5 und 13 errechnen. Auch hier wird das Bemühen erkennbar, das Gedächtnis so weit wie möglich zu entlasten. Obige Zusammenstellung zeigt, daß die Mantisse in der 3. und 4. Stelle jeweils um 22 Einheiten steigt. Wenn jetzt die Differenz zwischen den letzten 5 Stellen der Mantisse des Lösungslogarithmus 70581 und des darunter liegenden Logarithmus gebildet und durch 22 dividiert wird, wird im Effekt zum Auffinden der weiteren Lösungsziffern linear interpoliert. Diese Division wird, wenn die Aufgabe ungerade endet, bis zur 3. Stelle durchgeführt. Für das Beispiel ergibt sich 178 für die 4., 5. und 6. Lösungsziffer. Da die tausendstellige Aufgabenzahl auf 977 endet, ist die

Lösungsendung 817 (achtmalige Anwendung der Regel B, die von $AE = 377$ und $LE = 017$ ausgeht, vgl. Tab. 1). Der Hunderter aus dieser Lösungsendung entspricht der Ziffer, die per Division durch 22 erreicht wird. Die gesamte Lösung lautet 19817817. Sie wird erreicht, obwohl der Aufgabenlogarithmus relativ grob bestimmt, die Division durch 137 nicht genau, sondern approximativ und auch die lineare Interpolation relativ grob durchgeführt wurde. Tatsächlich müßte durch 21,88 statt 22 dividiert werden. Nicht notwendig ist die Korrektur, wenn die Lösung zwischen 19700000 und 19800000 liegt. Erforderlich wird sie aber, wenn die Lösung nur wenig unter 19900000 bzw. 19700000 liegt. Immerhin zeigt schon das behandelte Beispiel die Schwierigkeit, die 6. Lösungsziffer über die Division zu finden. Bei der geraden Aufgabenendung muß die Division nach Angaben des Probanden sogar bis zur 7. Lösungsziffer durchgeführt werden, da die Aufgabenendung die Lösungsendung nicht eindeutig determiniert.

Die vorstehenden Erläuterungen weisen viele gute Eigenschaften der Problemstellung auf, die sie für unseren Experten im Vergleich zu anderen Problemen relativ einfach macht. Zu nennen sind die (weitgehende) Determination der Lösungsendung durch die Aufgabenendung, die vereinfachende Möglichkeit einer Multiplikation statt der Division durch 137, die Notwendigkeit, nur 4 Logarithmen für 196–199 neben denen für 1 bis 100, die dem bereichsspezifischen Wissen zuzuordnen sind, genau kennen zu müssen, und ihr relativ konstanter Abstand zueinander. Der Proband verläßt sich nach seinen Angaben darauf, daß die ihm gegebene Aufgabe eine natürliche Zahl als Lösung hat. Da er nur den Aufgabenanfang und das Aufgabenende betrachtet, sollte er nicht aufgehende Wurzeln nicht entdecken können. Dennoch hält er diese Entdeckung für möglich, nämlich dann, wenn die (korrigierte) Division durch 22 in den letzten Ziffern nicht mit der algorithmisch produzierten Lösungsendung übereinstimme. In diesem Fall könne er den Aufgabenlogarithmus genauer bestimmen und nochmals rechnen. Stimme dann die durch Division gefundene Lösungsendung mit der algorithmisch produzierten nicht überein, wisse er Bescheid.

Wir lassen diese Frage zunächst noch offen, hatten aber schon während der Befragungen des Pb Zweifel. Die im nächsten Abschnitt geschilderten Untersuchungen ließen den Zweifel zur Gewißheit werden, daß der Pb hier seine Möglichkeiten überschätzt hat.

Deutlich machen seine Aussagen verschiedene Maßnahmen zur Ent-

lastung des Arbeitsgedächtnisses, ohne die ein Problem dieser Schwierigkeit gar nicht bewältigt werden könnte. Die Gesamtstrategie ist so angelegt, daß Zwischenresultate nur kurz bis zur Einleitung des nächsten Schrittes behalten werden müssen. Entlastend wirkt auch die Durchführung von automatisierten Operationen, die die schwierige Division durch 137 ersetzen. Weiterhin sind nur 4 Logarithmen von Zahlen über 100 genau zu wissen, deren relativ konstanter Abstand zueinander die Division durch 22 ermöglicht. Diese ist in vielen Fällen hinreichend genau, da das Lösungsende durch das Aufgabenende (weitgehend) determiniert ist. Das gesamte Lösungsverfahren ist intelligent ausgearbeitet, um ein schwieriges Problem schnell mit großer Wahrscheinlichkeit lösen zu können, wobei die Belastung des Arbeitsgedächtnisses auf das erreichbare Minimum reduziert wird. Hierfür bedeutsam ist auch, daß die durchzuführenden Berechnungen (Subtraktion, Multiplikation, Division) immer wieder geübt worden sind und nur wenig Zeit beanspruchen dürften (vg. dazu Anderson, 1985). Das Ergreifen von Maßnahmen, die das Arbeitsgedächtnis entlasten, betrachten wir als eine notwendige Voraussetzung für die Lösung von Problemen, die das Gedächtnis belasten. Das Lösen des hier dargestellten Problems macht bereichsspezifische Strategien erforderlich, die in ihrer Spezifität über das betrachtete Problem hinaus den allgemeinen Aspekt deutlich werden lassen: Für jede das Gedächtnis belastende Problemstellung muß das Lösungsverfahren so ausgearbeitet sein, daß die zeitliche und kapazitative Begrenztheit des Arbeitsgedächtnisses "überlistet" wird. Die Lösungsstrategie des Pb trägt diesem Erfordernis hervorragend Rechnung. Aus diesem Grund kann sie aber auch nicht perfekt sein.

Untersuchungen der Heuristik²

Die ersten beiden Untersuchungen sollten u.a. überprüfen, ob sich die Korrektur der heuristisch produzierten Lösung auch auf andere als die 6. Lösungsziffer bezieht. Entgegen den Aussagen des Pb wurde erwartet, daß dies nicht der Fall sein könne.

²Für die Programmierung, Durchführung und Auswertung der im folgenden geschilderten Untersuchungen 1,2,4 und 5 dankt der Verfasser den studentischen Mitarbeitern Birgit Eschmann, Silvana v. Hayn, Klaus-Martin Klein und Bianca Vaterrodt.

In Experiment 1 wurde der Proband mit 20 ungeraden Aufgabenendungen und je einem Vorschlag für den Lösungslogarithmus, in Experiment 2 mit 20 geraden Aufgabenendungen und je einem Vorschlag für den Lösungslogarithmus konfrontiert. Seine Aufgabe bestand jeweils darin, so schnell wie möglich die richtige Lösung anzugeben. Da, wie weiter unten aufgeführt, die Unrichtigkeit einiger Lösungslogarithmen bemerkt werden sollte (und auch bemerkt wurde), bestand die Möglichkeit, den Aufgabenanfang abzufragen und den Lösungslogarithmus genauer zu bestimmen. Vorweg sei mitgeteilt, daß dieses Angebot in keinem einzigen Fall genutzt wurde, obwohl seine Aussagen vor dem Experiment so interpretiert wurden, daß er genau dies tue, um etwa herauszufinden, ob die Lösung eine natürliche Zahl sei. Die postexperimentelle Befragung ergab, daß diese Aussagen sich auf die Einschätzung seiner eigenen Möglichkeiten und nicht auf das, was er wirklich tue, bezogen. Die 20 Aufgaben in Experiment 1 wurden in Zufallsfolge dargeboten. Sie lassen sich in 5 Untergruppen aufgliedern.

- 1) Die Division durch 22 macht keine Korrektur notwendig. Die sechste und siebte Lösungsziffer, die aufgrund der Division erreicht werden, stimmen mit den aufgrund des Algorithmus zu bestimmenden Lösungsziffern überein. Eine Abweichung von der richtigen Lösung ergibt sich in zwei von vier Fällen in der 5. Stelle der Lösung. Erwartet wurde, daß die Überprüfung der Korrektheit der Heuristik diese Ziffer nicht mit einbeziehen kann, so daß zwei spezifische Fehler erwartet wurden. Wurde also 19712817 statt der richtigen Lösung 19711817 erwartet, so bestätigte sich das.
- 2) Die Division durch 22 führt zu einer Lösung für die 6. Ziffer, die von der per Algorithmus generierten abweicht. Erwartet wurde hier, daß entweder der Aufgabenanfang erfragt werden würde, um den Lösungslogarithmus neu zu bestimmen, oder daß das Ergebnis der Division aufgrund der per Algorithmus generierten Lösung korrigiert werden würde. Erbringt die Division für die 4.-6. Lösungsziffer etwa 038, während der Algorithmus für die 6. Lösungsziffer die 3 vorschreibt, wurde als Lösung für diese Zifferngruppe 033 oder 043 erwartet. Auch diese Erwartung bestätigte sich ausnahmslos.
- 3) Diese Aufgabengruppe weicht von Gruppe 1 insofern ab, als nur eine Korrektur bei der Durchführung der Division durch 22 zu einem Ergebnis führen kann, das mit der algorithmischen Lösung bis zur 7. Stelle übereinstimmt. Auch hier gab es Aufgaben, die für die 5. Ziffer der Lösung zu falschen Ergebnissen führen mußten. Erwartet

wurden also spezifische Fehler, die auch ausnahmslos eintrafen.

- 4) Diese Aufgabengruppe weicht von Gruppe 2 insofern ab, als eine Korrektur bei der Division durch 22 erforderlich wird, die zu einem Ergebnis führt, das nicht mit der per Algorithmus generierten Lösung übereinstimmt. Die Erwartungen entsprechen denen in Gruppe 2 und bestätigten sich.
- 5) In dieser Aufgabengruppe führt die Division durch 22 in zwei Fällen ohne, in zwei Fällen mit Korrektur zu einem Ergebnis, das erst in der siebten Stelle mit der per Algorithmus generierten Lösung nicht mehr übereinstimmt. Erwartet wurden hier ausnahmslos richtige Lösungen. Mit einer Ausnahme ist diese Erwartung eingetroffen. Diese Ausnahme bezieht sich auf einen Divisionsfehler schon bei der 4. Lösungsziffer.

Das Experiment 2 stellte höhere Anforderungen an den Probanden. Es sei daran erinnert, daß mit jeder geraden Aufgabenendung vier mögliche Lösungen verknüpft sind. Die Division muß hier nach Aussagen des Pb bis zur 7. Lösungsziffer durchgeführt werden. Die 20 in Zufallsfolge präsentierten Aufgaben lassen sich wieder in fünf Untergruppen aufteilen:

- 1) Die Division durch 22 ist ohne Korrektur möglich und führt bis zur 7. Lösungsziffer zu einem Ergebnis, dessen Endung unter den vier möglichen ist. Erwartet wurden ausnahmslos richtige Lösungen, was sich bestätigte.
- 2) Die Division durch 22 ist ohne Korrektur möglich und führt zu einem Ergebnis, das einer der vier möglichen Lösungen entspricht. Erwartet wurde das Produzieren dieser Lösungen, die ausnahmslos um 500 zu hoch oder zu niedrig waren. Wenn die Division also zur Lösung 19709404 führt und 404 eine mögliche Endung ist, wurde sie erwartet, obwohl 19709904 die richtige Lösung ist. Es gibt, so wurde prognostiziert, keine Möglichkeit, diesen Fehler zu erkennen. Auch diese Prognose bestätigte sich ausnahmslos. So wird auch, wie erwartet, die Lösung 19819918 statt 19820418 produziert. 918 als Lösungsendung ist möglich und wird durch die Division nahegelegt.
- 3) Dieser Aufgabentyp entspricht dem ersten, macht aber eine Korrektur bei der Division durch 22 erforderlich. Erwartet wurden richtige Lösungen oder spezifische Fehler bei der 5. Lösungsziffer. Diese Erwartung bestätigte sich. Darüber hinaus traten aber Fehler auf, die dafür sprechen, daß die durchzuführende Korrektur nicht immer

einwandfrei funktioniert. So wird etwa 19850976 statt 19851226 produziert.

- 4) In dieser Aufgabengruppe macht die Division durch 22 in zwei Fällen eine Korrektur erforderlich, die in den anderen beiden Fällen unterbleiben kann. Die Division führt zu einer Lösung, die erst in der 7. Lösungsziffer zu einer Abweichung um 5 von der algorithmisch produzierten Lösung führt. Erwartet wurde, daß weder der Aufgabenanfang zur Neuschätzung des Lösungslogarithmus erfragt werden würde oder daß, da die durch Division erreichte 6. Lösungsziffer mit der algorithmisch zu produzierenden übereinstimmt, die 7. Lösungsziffer auf die algorithmisch zu findende hin korrigiert werden würde. Letztere Erwartung bestätigte sich. In einem Fall funktionierte die Korrektur nicht perfekt. Statt der richtigen Lösungsendung 492 wurde die (mögliche) Lösung 242 produziert.

- 5) In dieser Aufgabengruppe befanden sich ausnahmslos Aufgaben, bei denen die Division durch 22 in zwei Fällen mit und in zwei Fällen ohne Korrektur zu einer Lösungsendung führte, die in der Mitte zwischen zwei Möglichkeiten liegt. Erwartet wurde hier, daß entweder der Aufgabenanfang erfragt oder eine Lösung, die als nächste über oder unter dem Divisionsergebnis liegt, erraten werden würde. Letzteres war der Fall.

Die Untersuchungen zur Heuristik und die anschließend mit dem Probanden durchgeführte Besprechung bestätigten hochgradig unsere Erwartungen. Diese setzen voraus, daß der Proband die Logarithmen für 196 bis 199 bis auf sieben Stellen hinter dem Komma verfügbar hat, obwohl er unvorbereitet in die Untersuchungen gegangen ist. Sie setzen weiter voraus, daß er die Division korrekt durchführen und ggf. auch entsprechend korrigieren kann. Sie zeigen aber auch die Fehleranfälligkeit der Heuristik. Sieht man einmal von den seltenen Rechenfehlern ab, dann ist die Qualität ganz und gar davon abhängig, wie genau Aufgaben- und Lösungslogarithmus bestimmt werden. Werden sie so ungenau bestimmt, daß die 5. Lösungsziffer falsch ist, gibt es keine Möglichkeit, dies zu erkennen, falls sich die 6. Lösungsziffer der Division annähernd so ergibt wie die algorithmisch produzierte Lösung. Bei geraden Aufgabenendungen sind mehr Fehler zu erwarten, da für die 6. Lösungsziffer immer 4, für die 7. Lösungsziffer 2 Möglichkeiten bestehen. Diese Fehleranfälligkeit der Heuristik nimmt der Proband, wie sich bei der Besprechung der experimentellen Ergebnisse gezeigt

hat, in Kauf. Er produziert häufig richtige Lösungen in einer Zeit, die ein Computer nicht erreicht, muß dafür aber auch Fehler in Kauf nehmen. Die Heuristik ist hervorragend ausgearbeitet, um genau dieses Ziel zu erreichen: Häufig richtige Lösungen zu finden in einer Zeit, die der Computer nicht erreicht und die angesichts der Schwierigkeit des Problems spektakulär anmutet. Die Experimente haben eine Situation simuliert, der der Proband häufiger konfrontiert war, wenn er vor Zeugen ein schwieriges Rechenproblem in Kopf zu lösen hatte, nämlich möglichst schnell die Lösung zu finden. Auch in dieser Situation bestimmt er in Zweifelsfällen den Aufgabenlogarithmus nicht neu, da ihn die korrekte Lösung nur interessiert, wenn sie schnell erfolgt. Die Heuristik ist so konstruiert, daß sie selbst dann noch eine gute Chance für einen Fehler richtige Lösung eröffnet, wenn der algorithmische Check einen Fehler indiziert. Sie demonstriert in einem Bereich, wo Mensch und Computer wetteifern können, die Überlegenheit eines heuristischen Vorgehens bzgl. des zeitlichen Aspektes und selbstverständlich eine Unterlegenheit bzgl. der Häufigkeit richtiger Lösungen.

Die bisher geschilderten Untersuchungen beziehen sich, da der Proband den Aufgabenanfang niemals erfragt hat, auf den letzten Teil der Heuristik: Der Lösungslogarithmus ist gegeben, und daraus wird die Lösung bestimmt. Unter der Annahme, daß Rechenfehler selten auftreten, haben wir in Abhängigkeit von der Richtigkeit oder Falschheit des Lösungslogarithmus richtige Lösungen oder spezifische Fehler prognostizieren und bestätigen können. Der letzte Teil der Heuristik ist also für sich genommen wenig fehleranfällig. Wenn Fehler auftreten, dann wegen der falschen Bestimmung des Lösungslogarithmus, von dem alle Berechnungen im letzten Teil der Heuristik ausgehen. Wie aber kommt es dazu? Wird schon der Aufgabenlogarithmus falsch bestimmt, oder treten die Fehler erst im mittleren Teil der Heuristik auf? Um diese Fragen beantworten zu können, haben wir den Pb in einer dritten Untersuchung mit 10 Aufgaben konfrontiert und ihn gebeten, den Aufgaben- und Lösungslogarithmus sowie die Lösung selbst laut zu sagen. Die dafür erforderlichen Zeiten wurden gestoppt. Auffällig ist, daß die Bestimmung des Aufgabenlogarithmus durchschnittlich am wenigsten Zeit beansprucht, ein für den Probanden unerwartetes Ergebnis. In den den Untersuchungen vorausgegangenen Befragungen hat er diesen Teil als den schwierigsten und zeitlich beanspruchendsten angesehen. Eindeutig die meiste Zeit beanspruchte der letzte Teil der Heuristik, was darauf zurückzuführen ist, daß an dieser Stelle die Richtigkeit der Division durch 22 nochmals überprüft wird und das Ergebnis mit der algorithmisch

produzierten Lösungsendung integriert werden muß.

Obwohl der Proband sich seinen eigenen Aussagen zufolge darauf eingestellt hatte, richtige (und nicht so sehr schnelle) Lösungen zu produzieren, waren vier der zehn Ergebnisse falsch. Wir sehen diesen Wert nicht unbedingt als repräsentativ für die Fehlerhäufigkeit an, meinen aber, daß die Art der aufgetretenen Fehler repräsentativ ist. Sie gehen nicht auf die falsche Bestimmung des Aufgabenlogarithmus zurück. Mit jedem der produzierten Aufgabenlogarithmen hätte sich bei einer korrekten Verwendung der Heuristik die richtige Lösung finden lassen. Sie gehen auch nicht auf Fehler im letzten Teil der Heuristik zurück, was die Ergebnisse der vorangegangenen Experimente bestätigt. Sie finden sich in dieser dritten Untersuchung ausschließlich im mittleren Teil, der nach der Bestimmung des Aufgabenlogarithmus zur Produktion des Lösungslogarithmus führt. Die rechnerischen Operationen, die in diesem Teil durchzuführen sind, werden richtig ausgeführt, aber teilweise mit falschen Zahlen. Die Operationen selbst sind hochgradig übergeleitet und kaum fehleranfällig. Sie müssen aber von Problem zu Problem mit wechselnden Zahlen durchgeführt werden, und hier entstehen Fehlermöglichkeiten durch Interferenzen. In einem Fall tritt ein Fehler einfach deshalb auf, weil nach einer korrekten Bestimmung des Lösungslogarithmus (7, 2967477) mit einer falschen Zahl (7, 2964777) weiter gerechnet wird. Die Reihenfolge der Ziffern wird falsch reproduziert, bevor der neue Schritt eingeleitet wird. In zwei Fällen wird die Differenz zwischen 1000,1 und dem Aufgabenlogarithmus richtig errechnet (sie wird laut gesagt), weiter gerechnet wird aber mit einer um 0,1 zu hohen bzw. zu niedrigen Zahl, die in die Multiplikation mit 73 eingeht. Möglich erscheint, daß die erste Ziffer hinter dem Komma in dieser Differenz zum Zeitpunkt, wo sie in die Multiplikation eingeht, schon vergessen ist. Die vom Pb favorisierte Methode des "Überkreuzmultiplizierens", der sich viele Rechenkünstler bedient haben (Smith 1983), berücksichtigt diese Ziffer erst relativ spät. Angesichts der zeitlichen Begrenztheit des Arbeitsgedächtnisses (Baddeley 1981) liegt hier eine Fehlermöglichkeit.

Es sind also Verarbeitungsfehler des Arbeitsgedächtnisses, die zu falschen Lösungen führen. Dieses Ergebnis vermag trotz aller geschätzten Entlastungsmaßnahmen nicht zu überraschen und findet auch eine Unterstützung durch die Klagen des Pb., Zwischenlösungen nicht notieren zu dürfen. Aber genau dieser Situation ist der Pb auch bei öffentlichen Auftritten konfrontiert. Vor den Untersuchungen war er der Meinung gewesen, alle Zwischenlösungen nach längerer Zeit richtig reproduzieren zu können. Aber in dieser Hinsicht schätzte der Pb sein

Leistungsvermögen falsch ein. Die Fehler, die er begangen hat und die ihm erklärt wurden, überraschten ihn. Es war ihm nicht bewußt gewesen, derartigen Fehlern zu unterliegen, die auch verständlich machen, warum manchmal bereits die dritte Lösungsziffer falsch ist. Da dies auch in den eingangs erwähnten Rekordversuchen der Fall gewesen ist, scheinen Fehler, wie sie in der dritten Untersuchung aufgetreten sind, manchmal begangen zu werden. Sie führen dann zu einem so falschen Lösungslogarithmus, daß auch schon die dritte Lösungsziffer falsch sein kann. Der Pb hatte bisher falsche Lösungen hauptsächlich auf die falsche Bestimmung des Aufgabenlogarithmus zurückgeführt. Die Ergebnisse der bisher mitgeteilten Untersuchungen haben ihn veranlaßt, ein neues Lösungsverfahren auszuarbeiten, das von vierstelligen Aufgaben- und Lösungsendungen ausgeht, so daß der heuristische Anteil geringer wird.

Untersuchungen des Algorithmus

Angesichts des großen bereichsspezifischen Zahlenwissens unseres Pb haben wir uns eine Modellvorstellung über die Repräsentation des bereichsspezifischen Wissens über AE-LE-Paare gebildet, die von der Annahme der kognitiven Ökonomie ausgeht: So wenig bereichsspezifisches Wissen wie nötig, um unter Anwendung weniger Regeln alles, was nicht gewußt wird, ableiten zu können. Die Modellvorstellung weicht von den Aussagen des Pb ab, der vor den nun zu schildernden Experimenten Tab. 1 und Tab. 2 für fest abgespeichert hielt, nach Kenntnisnahme der Resultate seine Vorstellungen aber geändert hat.

Ein Blick auf Tabelle 1 zeigt, daß für diesen "Basisteil" folgende Regeln gelten:

Regel C: Für die letzten beiden Stellen in AE und LE gilt:

Wenn $AE2 = AE1 + 70$, dann $LE2 = LE1 + 10$

Regel D: Wenn $AE1 + AE2 = 850$, dann $LE1 + LE2 = 50$

Beide Regeln zusammen implizieren, daß der Pb nur zwei Paare ($AE = 001 / LE = 001$ und $AE = 363 / LE = 003$) sowie acht weitere Hunderter für AE kennen muß, um den gesamten Basisteil generieren zu können. Bei der Konfrontation mit $AE = 141$ geht der Pb laut Modellvorstellung von $AE = 001$ aus. Durch zweimalige Anwendung von Regel C gelangt er zu $AE = 141 / LE = 021$, wenn der Hunderter aus AE bekannt ist. Ist die letzte Aufgabenziffer eine 9 (z.B. $AE =$

709), so geht der Pb laut Modell ebenfalls vom Paar $AE = 001 / LE = 001$ aus. Er generiert jetzt unter Anwendung von Regel C solange neue AE-LE-Paare, bis die gegebene $AE = 709$ plus der generierten $AE = 141$ als Summe 00 oder 50 für die letzten beiden Ziffern ergibt. Anwendung von Regel D führt zu $AE = 709 / LE = 029$. Unter Einbeziehung der oben genannten Regeln A und B lassen sich alle weiteren AE-LE-Paare generieren, die auf 1 bzw. 9 enden. Z.B. laute $AE = 091$. Laut Modellvorstellung generiert der Proband solange AE-LE-Paare, bis sich bzgl. der gegebenen AE und der generierten AE entweder eine Übereinstimmung oder eine Abweichung im Zehner um 5 ergibt (Anwendung Regel C). Für das Beispiel erfüllt $AE = 141 / LE = 21$ dieses Kriterium. Die Abweichung um 5 initiiert Anwendung der Regel A, die zu $AE = 991 / LE = 071$ führt. Nunmehr ist eine Übereinstimmung zwischen der gegebenen $AE = 091$ und der generierten $AE = 991$ auch im Zehner gegeben. Sukzessive Anwendung der Regel B führt zu $AE = 091 / LE = 371$.

Zur weiteren Illustration der Modellvorstellung gehen wir von der gegebenen $AE = 579$ aus. Angenommen wird, daß die Endziffer 9 immer das Paar $AE = 001 / LE = 001$ aktiviert, von dem ausgegangen wird. Zunächst wird Regel C solange angewendet, bis ein AE-LE-Paar gefunden wird, bei dem die letzten beiden Ziffern der generierten AE plus den letzten beiden Ziffern der gegebenen AE 00 oder 50 ergeben. $AE = 971 / LE = 011$ erfüllt dieses Kriterium. Sodann wird Regel D angewendet, die zu $AE = 879 / LE = 039$ führt. Nunmehr ist bzgl. der generierten und der gegebenen AE eine Übereinstimmung in den beiden letzten Stellen gegeben. Anwendung von Regel B führt zu $AE = 579 / LE = 139$.

Ein letztes Beispiel illustriert die Modellvorstellung, die für die Endungen 1 und 9 in Abb. 1 dargestellt ist; für die Endungen 3 und 7 gilt das Gesagte entsprechend. Gegeben sei $AE = 759$. Ausgangspunkt ist das Paar $AE = 001 / LE = 001$. Zunächst wird Regel C solange angewendet, bis die beiden letzten Ziffern in der generierten AE plus den beiden letzten Ziffern in der gegebenen AE 00 oder 50 ergeben. Das trifft für $AE = 141 / LE = 021$ zu. Nunmehr wird Regel D angewendet, die zu $AE = 709 / LE = 029$ führt. Da sich zwischen der generierten AE und der gegebenen AE eine Abweichung im Zehner um 5 findet, wird Regel A angewendet, die zu $AE = 559 / LE = 079$ führt. Jetzt ist eine Übereinstimmung in den letzten beiden Stellen zwischen gegebener und generierter AE gegeben. Mehrfache Anwendung von Regel B führt zu $AE = 759 / LE = 679$.

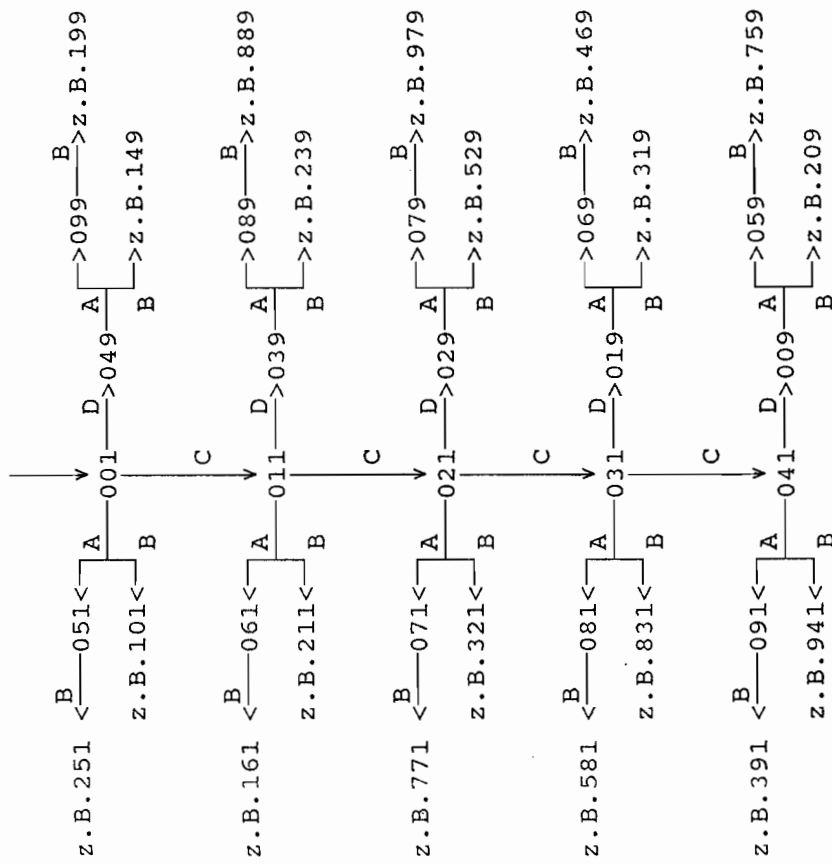


ABBILDUNG 1: Modell für die Generierung von Lösungsendungen 1 oder 9.

Der Übersicht halber sind nur die Lösungs-, nicht die Aufgabenendungen aufgeführt. Die Buchstaben an den Pfeilen geben die Regeln wieder. Dasselbe Modell wird für die Aufgaben- und Lösungsendungen 3 und 7 postuliert.

Die dargestellten Modellvorstellungen wurden in Exp. 4 getestet. Dem Pb wurden Aufgabenendungen und Lösungsendungen paarweise auf dem Monitor einer Versuchssteuereinrichtung dargeboten, und er sollte so schnell wie möglich durch Druck einer "Richtig"- oder "Falsch"-Taste kundtun, ob die Zuordnung korrekt oder falsch war. Die Zeit wurde auf eine Millisekunde genau gemessen. Richtige und falsche Lösungen waren ausbalanciert. Jede der 80 verwendeten Aufgabenendungen war

je zweimal mit der korrekten und je zweimal mit einer falschen Lösung gepaart. Die falschen Lösungen hatten denselben Zehner und Einer wie die richtige Lösung, waren als solche also schwer zu erkennen. Dennoch wurde nur ein einziger Fehler begangen — und zwar wurde eine falsche Lösung für richtig gehalten — obwohl der Proband mit dieser Art von Anforderung nicht gerechnet hatte und unvorbereitet war. Die Zahlenpaare wurden in randomisierter Folge dargeboten. In die an den Modellvorstellungen orientierte Auswertung gingen nur die Verifikationszeiten ein. Schon der Vergleich der zu beobachtenden Relationen zwischen den Zeiten mit den theoretisch erwarteten zeigte eine hohe Übereinstimmung (95,5% = 420 von 440 Relationen zwischen Zeitpaaren). Zusätzlich wurde geprüft, wieviel Varianz verschiedene Versionen des dargestellten Modells aufklären. Geht man von der Annahme aus, daß die Regeln wegen unterschiedlich schwieriger Rechenoperationen unterschiedlich viel Zeit beanspruchen, so werden für die durchzuführende multiple Regressionsanalyse Dummy-Variablen derart konstruiert, daß sie den Wert 1, wenn laut Modell der Pfad besritten wird, und den Wert 0 annehmen, wenn der Pfad nicht besritten wird. Bei der Annahme, daß jede Regel konstant viel Zeit beansprucht, werden geeignete Summen von Dummy-Variablen gebildet, um den Test durchführen zu können. Die Dummy-Variablen-Kodierung hat den Vorteil, die für die Regeln benötigten Zeiten direkt aus den Regressionskoeffizienten schätzen zu können³.

Ein vereinfachtes Beispiel in Abb. 2 und Tab. 3 demonstriert die Kodierungen.

³Diesen Vorschlag zur Analyse der Zeiten verdanke ich Herrn Dr. E. Erdfelder.

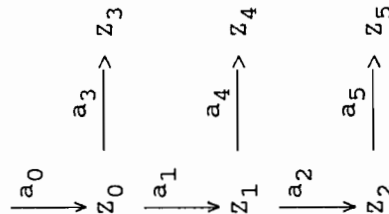


ABBILDUNG 2: Hypothetisch angenommene Gedächtnisstruktur zur Erläuterung der Dummy-Variablen-Kodierung. An den Pfeilen stehen die Zeiten.

Tabelle 3

Dummy-Variablen-Kodierung für die in Abb. 2 gezeigte Struktur.

	Dummy-Variablen					
	X1	X2	X3	X4	X5	X'1 X'2
$t(Z0) = a0$	0	0	0	0	0	0
$t(Z1) = a0 + a1$	1	0	0	0	0	1 0
$t(Z2) = a0 + a1 + a2$	1	1	0	0	0	2 0
$t(Z3) = a0 + a3$	0	0	1	0	0	0 1
$t(Z4) = a0 + a1 + a4$	1	0	0	1	0	1 1
$t(Z5) = a0 + a1 + a2 + a5$	1	1	0	0	1	2 1

Die Dummy-Variablen-Kodierung setzt keine Restriktionen voraus. Für den Test eines Modells mit den Annahmen $a1=a2$ und $a3=a4=a5$ werden die Variablen $X'1=X1+X2$ und $X'2=X3+X4+X5$ gebildet.

Führt man keinerlei Restriktionen bzgl. der Dauer der Regelanwendung ein, ergibt sich ein multiples $R^2 = 0,65$, das bei Adjustierung gemäß

der Zahl der Prädiktoren auf 0,32 abfällt. Den besten Anpassungswert erreicht das Modell, das von einer konstanten Zeitbeanspruchung der Regeln A, C, D ausgeht ($R^2 = 0,58$, adjustiertes $R^2 = 0,41$). Die Annahme der Konstanz für Regel B konnte wegen der Anlage des Experiments nicht getestet werden. Diese Prüfung hätte eine weit umfangreichere Untersuchung erforderlich gemacht. Für das am besten passende Modell ergeben sich Aktivationszeiten für die Basispaare $AE = 001 / LE = 001$ und $AE = 373 / LE = 003$ von 1416 bzw. 2008 msec., in die allerdings auch noch die psychomotorische Komponente eingeht. Regel C beansprucht 372 msec., Regel D 448 msec. und Regel A 2180 msec. Das multiple R^2 für dieses Modell ist auf dem zuvor spezifizierten Niveau $\alpha = 0,05$ signifikant, während der Abfall an erklärter Varianz gegenüber dem Modell ohne jede Restriktion insignifikant ist. Allerdings ist anzumerken, daß die Verteilungsannahmen dieser Tests bei Zeitmessungen kaum erfüllt sein dürften.

Diese Ergebnisse sind mit dem Pb durchgesprochen worden. Aufgrund seiner Introspektion konnte er zunächst die Anwendung der Regeln C und D nicht verifizieren, stellte aber später fest, daß er bemerkt habe, die 7 und 9 als Aufgabenendung weniger gut zu beherrschen. Wahrscheinlich sei das Modell richtig. Diese Aussagen werden hier nicht als Bestätigung des Modells gewertet, sondern zeigen Schwierigkeiten des introspektiven Zugangs zu Operationen auf, die hochgradig automatisiert sind und nur wenig Zeit beanspruchen (vgl. auch Anderson 1985). Setzt man bei der Modellprüfung eine weitere Restriktion derart, daß alle Zeiten im Basisteil gleich groß sind, so vermindert sich die aufgeklärte Varianz allerdings nur geringfügig; der Abfall ist insignifikant. Allerdings ist die Teststärke für eine Annahme von H_0 nicht ausreichend, und bei Annahme dieses Modells bliebe zu erklären, warum die Schätzungen für die zeitliche Beanspruchung durch Regel C und D konsistent zu kleinen, aber positiven Werten geführt haben. Deshalb erscheint das Modell, das von der Anwendung zweier Regeln auch im Basisteil ausgeht, durch die Analysen und vor dem Hintergrund der Annahme der kognitiven Ökonomie als gut gestützt.

Ähnlich sind wir bei der Analyse der geraden Aufgabenendungen vorgegangen. Tab. 2 zeigt, daß auch hier aufgrund von zwei Regeln aus zwei Basispaaren ($AE = 472 / LE = 002$, 252, 502, 752 sowie $AE = 784 / LE = 004$, 254, 504, 754) der Rest des Basisteils generiert werden kann, sofern zusätzlich einige Hunderter für AE verfügbar sind:

Regel F: Für die letzten beiden Stellen in AE und LE gilt:

Wenn $AE2 = AE1 + 20$, dann $LE2 = LE1 + 10$

Regel G: Wenn $AE1 + AE2 = 600$, dann $LE1 + LE2 = 50$

Aufgrund dieser Regeln und Regel E (s. oben) lassen sich alle AE-LE-Paare generieren. Abb. 3 zeigt die Modellvorstellung, die hier wegen der Ähnlichkeit zum zuvor erörterten Modell nicht weiter erläutert werden soll.

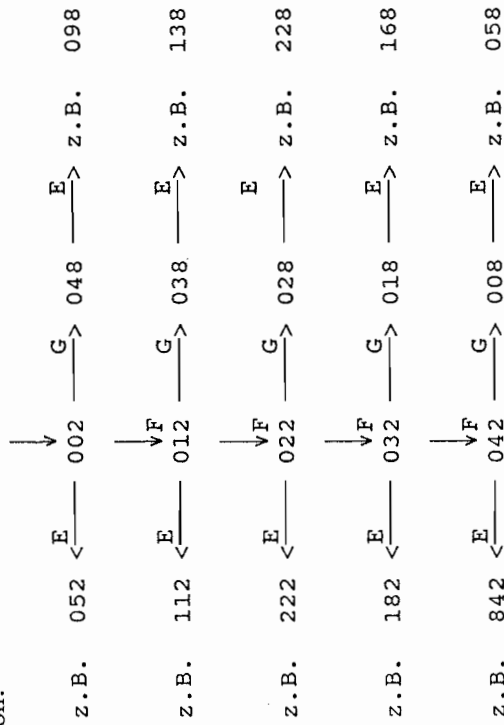


ABBILDUNG 3: Modell für die Generierung von Lösungsendungen
2 oder 8.

Der Übersicht halber ist jeweils nur eine Lösungsendung aufgeführt. Die Buchstaben an den Pfeilen geben die Regeln wieder. Dasselbe Modell wird für die Aufgaben- und Lösungsendungen 4 und 6 postuliert.

Getestet wurde das Modell in einem Experiment 5, das so wie Experiment 4 abgelaufen ist. Jede gerade Aufgabenendung war zweimal mit möglichen Lösungen und zweimal mit falschen Lösungen verknüpft. Im Unterschied zu Experiment 4 ging der Proband vorbereitet in die Untersuchung. Erwartet wurden kürzere Antwortzeiten, was sich bestätigte; es sollte untersucht werden, ob trotz der Vorbereitung und der kürzeren Antwortzeiten im Basisteil Zeitunterschiede im Sinne unserer Erwartungen, die in Abb. 3 dargestellt sind, auftreten würden. In Abb. 3 ist nur die jeweils kleinste von vier möglichen Lösungen dargestellt worden. Die Ergebnisse sind deutlich. Am besten paßt auch

einschätzen kann. Aber diese Annahme bestätigt sich zumindest nicht durchgängig.

3) Deutlich dürfte geworden sein, daß unser Experte bereichsspezifische Strategien anwendet, die er selbst entwickelt hat. Inwieweit sie anderen Personen antrainierbar sind, ist eine offene Frage. Es gibt zunächst einmal keinen Grund, diese Trainierbarkeit zu bezweifeln, wobei zu berücksichtigen ist, daß ein derartiges Training viele Komponenten umfassen müßte, deren Beherrschung einen beträchtlichen Zeitaufwand notwendig machen würde. Darüber hinaus zeigen die Untersuchungen Begrenzungen des Arbeitsgedächtnisses, die uns nicht fremd sind. Allerdings weisen Untersuchungen zur Gedächtnisspanne, über die hier nicht mehr berichtet werden soll, eine für Zahlen spezifische erhöhte Persistenz der Gedächtnisspur auf, die aufgrund ausgedehnter vorexperimenteller Erfahrungen zustande gekommen sein dürfte (vgl. Bredenkamp et al., 1988).

4) Die Untersuchungen sprechen für eine kognitiv ökonomische Organisation des bereichsspezifischen Wissens. Aus dem Wissen über wenige Zahlenrelationen läßt sich über Anwendung einiger Regeln alles weitere generieren.

5) Die Ergebnisse geben insgesamt keinen Anlaß dazu, unseren Experten als eine Person anzusehen, deren Leistungen nicht mit schon bekannten Konzepten aufklärbar wären. Es erscheint nicht notwendig, eine spezielle Gedächtnispsychologie dieses Experten schreiben zu müssen. Was ihn gegenüber anderen Personen auszeichnet, ist, daß er eine Strategie erdacht und eingeübt hat, die der Begrenztheit des menschlichen Gedächtnisses hervorragend Rechnung trägt. Die Erklärung derartiger schöpferischer Akte bereitet der Psychologie nicht nur im Bereich des Kopfrechnes Schwierigkeiten. Die Aussagen unseres Pb zu der Frage, wie er zu seinem Problem und der Lösungsstrategie gekommen ist, sind spärlich und nicht berichtenswert. Auch ihm scheint die Antwort auf diese Frage weitgehend unbekannt zu sein.

hier das Modell, das konstante Zeiten für Regel F (163 msec.) und Regel G (78 msec.) vorsieht; die Annahme eines konstanten Zeitbedarfs für Regel E konnte wegen der Anlage des Experiments nicht geprüft werden. Die Aktivierung der Basispaare erfordert laut Modell, für das $R^2 = 0,77$ (adjustiertes $R^2 = 0,67$) gilt, jeweils 2100 msec. Der Abfall an erklärter Varianz gegenüber einem Modell ohne jede Restriktion ($R^2 = 0,80$, adjustiertes $R^2 = 0,60$) ist insignifikant. Ein ebenfalls nicht bedeutsamer Abfall gegenüber dem Modell mit Restriktionen ergibt sich, wenn der Zeitbedarf für die Regeln F und G Null gesetzt wird. Allerdings wäre auch hier zu fragen, warum bei Annahme des Modells, das keine Zeitunterschiede im Basisteil voraussetzt, die Schätzungen der Zeiten für Regel F und G konsistent positiv ausgefallen sind.

Obwohl Aufgaben mit geraden Endungen schwieriger zu bewältigen sind, war der Zeitaufwand für die Regeln geringer als in Experiment 4 (ungerade Endungen). Dies führen wir darauf zurück, daß der Pb vorbereitet in Experiment 5 ging, während er auf die Anforderungen des Experiments 4 nicht eingestellt war. Dies dürfte auch ein Grund für die geringere Fehlervarianz in Experiment 5 gewesen sein, auf die die vergleichsweise hohe Varianzaufklärung zurückzuführen ist.

Schlußbemerkungen

- 1) Die Aussagen eines Pb geben nicht zuverlässig Auskunft über sein Vorgehen. Das zeigt sich etwa in den berichteten Untersuchungen dort, wo der Pb aufgrund der mitgeteilten Ergebnisse seine Auffassung über das Prozedieren geändert hat. Weiterhin unterliegt die Kommunikation zwischen Pb und V1 Fehlinterpretationen. Die Aussagen eines Pb sollten Anlaß zur Formulierung von Hypothesen geben, deren Überprüfung aber auf introspektiv gewonnene Daten verzichtet.
- 2) Unser Pb hat sich verschiedentlich zur Leistungsfähigkeit seines Gedächtnisses geäußert. Er gab auch verschiedentlich Wahrscheinlichkeitsangaben für die Richtigkeit seiner Lösungen an. Derartige Äußerungen zählt man gewöhnlich den Metakognitionen zu. Auch in diesem Bereich haben sich Fehleinschätzungen ergeben. Interessant ist, daß diese Aussagen auf einen Experten zutreffen. Man sollte meinen, daß er sich jeder mentalen Aktivität deutlich bewußt ist und diese mitteilen kann, daß er aufgrund vielfältiger Erfahrungsmöglichkeiten sein eigenes Leistungsvermögen realistisch

Literatur

- Anderson, J. R. (1985). *Cognitive Psychology and its implications*. New York: Freeman and Company.
- Baddeley, A. (1981). The concept of working memory: A view of its current state and probable future development. *Cognition* 10, 17-23.
- Breidenkamp, J., Klein, K.-M., v. Hayn, S. & Vaterrodt, B. (1988). Gedächtnispsychologische Untersuchungen eines Rechenkünstlers. *Sprache & Kognition* 7, 69-83.
- Hunter, I. M. L. (1962). An exceptional talent for calculative thinking. *British Journal of Psychology* 53, 243-258.
- Smith, S. B. (1983). *The great mental calculators*. New York: Columbia University Press.